Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2020 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντες Ε. Νικολιδάκης και Χ. Σαρόγλου

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

Θέμα 1

(i) (0,7 μον.) Δίνεται η ακολουθία θετικών όρων $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + \cdots + a_n,\ n \in \mathbb{N}$ της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, είναι φραγμένη αν και μόνο αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ και $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

(iii) (0,8 μον.) Να βρεθούν τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$ συγκλίνει.

Θέμα 2

(i) (1 μον.) Δίνονται δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους ορίζει μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση.

(ii) (1 μον.) Να απόδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x,\ x \in [2, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{x},\ x \in (0, 3]$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς

Θέμα 3

(i) (1 μον.) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ x & , \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) (0,75 μον.) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $|f|$ να είναι ολοκληρώσιμη. Εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη.

(iii) (0,75 μον.) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $\displaystyle\int_0^1 (e^{f(x)^2} - 1)dx = 0$. Να αποδείξετε ότι f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Θέμα 4

(i) (1 μον.) Έστω $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) > 0,\ x \in [a,b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx.$$

(ii) (1 μον.) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x^2-3x-1}{(x+1)(x-2)^2}dx \quad \text{και} \quad \int_0^{\pi/2} e^x \sin(2x)dx.$$

(iii) (0,5 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_8^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Θέμα 5 (1.5 μον.)
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πολυώνυμο Taylor της f, $T_{4n-1,f,0}(x)$ τάξης $4n-1$ με κέντρο το 0. Βρείτε επίσης μία έκφραση για το αντίστοιχο υπόλοιπο $R_{4n-1,f,0}(x)$. Τέλος, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} T_{4n-1,f,0}(x) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\,.$$